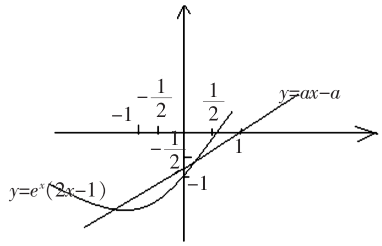
$[g(x)]_{max}=-2e^{-\frac{1}{2}}$，当 $x=0$ 时，$g(0)=-1$，$g(1)=3e>0$，直线 $y=ax-a$ 恒过(1,0)斜率为 a，故 $-a>g(0)=-1$，且 $g(-1)=-3e^{-1}\geqslant -a-a$，解得 $\frac{3}{2e}\leqslant a<1$，故选 D.



二、构建函数模型并结合其图像研究方程根的范围

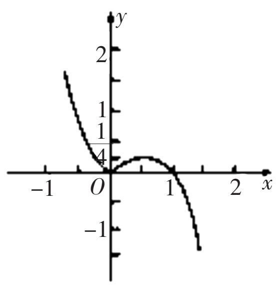
例 3. 对于实数 a 和 b，定义运算“*”：$a*b=\begin{cases}a^2-ab, a\leqslant b\\ b^2-ab. a>b\end{cases}$ 设 $f(x)=(2x-1)*(x-1)$，且关于 x 的方程 $f(x)=m(m\in \mathrm{R})$ 恰有三个互不相等的实数根 x_1, x_2, x_3，则 $x_1x_2x_3$ 的取值范围是________.

【解析】 由定义可知，$f(x)=\begin{cases}(2x-1)x, x\leqslant 0\\ (-x-1)x, x>0\end{cases}$ 作出函数 $f(x)$ 的图像，如图所示. 由图可知，当 $0<m<\frac{1}{4}$ 时，$f(x)=m(m\in \mathrm{R})$ 恰有三个互不相等的实数根 x_1, x_2, x_3.

不妨设 $x_1<x_2<x_3$，易知 $x_2>0$，且 $x_2+x_3=2\times\frac{1}{2}=1$，$\therefore x_2x_3<\frac{1}{4}$.

令 $\begin{cases}2x-1 \quad x=\frac{1}{4},\\ x<0,\end{cases}$

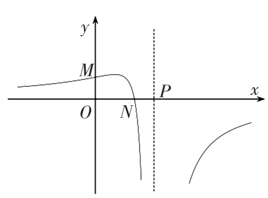
解得 $x=\frac{1-\sqrt{3}}{4}$ 或 $x=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ (舍去). $\therefore \frac{1-\sqrt{3}}{4}<x_1<0$，$\therefore \frac{1-\sqrt{3}}{16}<x_1x_2x_3<0$. 答案$(\frac{1-\sqrt{3}}{16}, 0)$.



三、构建函数模型并结合其图像研究量与量之间的大小关系

例 4. 函数 $f(x)=\frac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图像如图所示，则下列结论成立的是（　　）

(A) $a>0$，$b>0$，$c<0$
(B) $a<0$，$b>0$，$c>0$
(C) $a<0$，$b>0$，$c<0$
(D) $a<0$，$b<0$，$c<0$



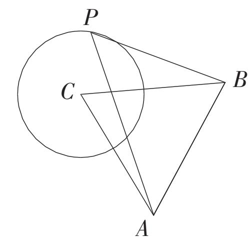
【解析】 由 $f(x)=\frac{ax+b}{(x+c)^2}$ 及图像可知，$x\neq -c$，$-c>0$，则 $c<0$；当 $x=0$ 时，$f(0)=\frac{b}{c^2}>0$，所以 $b>0$；当 $y=0$，$ax+b=0$，所以 $x=-\frac{b}{a}>0$，所以 $a<0$. 故 $a<0$，$b>0$，$c<0$，选 C.

四、构建函数模型并结合其几何意义研究函数的最值问题和证明不等式

例 5. 已知实数满足 x，y，满足 $\begin{cases}x-2y+4\geqslant 0,\\ 2x+y-2\geqslant 0,\\ 3x-y-3\leqslant 0,\end{cases}$ 则 x^2+y^2 的取值范围是________.

【解析】 由图知原点到直线 $2x+y-2=0$ 距离平方为 x^2+y^2 最小值，为 $(\frac{2}{\sqrt{5}})^2=\frac{4}{5}$，原点到点(2,3)距离平方为 x^2+y^2 最大值，为 13，因此 x^2+y^2 取值范围为$[\frac{4}{5}, 13]$.

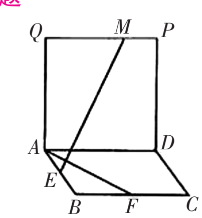
例 6. 如图，ΔABC 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形，P 是以 C 为圆心，半径为 1 的圆上任意一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的取值范围是________.



【解析】 因为 $|AC|=|BC|=2\sqrt{3}$，$\angle ABC=60°$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cos 60°=6$，因为 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP})(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CP}^2$，因为 $|CP|=1$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=6+\overrightarrow{CP}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})+1=7+\overrightarrow{CP}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$，因为 ΔABC 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形，$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$ 是与 AB 垂直且方向向上，长度为 6 的一个向量，由此可得，点 P 在圆 C 上运动，当 $\overrightarrow{CP}$ 与 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$ 共线同向时，$\overrightarrow{CP}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$ 取最大值，且这个最大值为 6 当 $\overrightarrow{CP}$ 与 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$ 共线反向时，$\overrightarrow{CP}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$ 取最小值，且这个最小值为 -6，故 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的最大值为 $7+6=13$，最小值为 $7-6=1$. 即 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的取值范围是[1, 13].

五、构建立体几何模型研究代数问题

例 7. 如图，四边形 $ABCD$ 和 $ADPQ$ 均为正方形，它们所在的平面互相垂直，动点 M 在线段 PQ 上，E、F 分别为 AB、BC 的中点. 设异面直线 EM 与 AF 所成的角为 θ，则 $\cos\theta$ 的最大值为______.



【解析】 建立坐标系如图所示. 设 $AB=1$，则 $\overrightarrow{AF}=(1, \frac{1}{2}, 0)$，$E(\frac{1}{2}, 0, 0)$. 设 $M(0, y, 1)(0\leqslant y\leqslant 1)$，则 $\overrightarrow{EM}=(-\frac{1}{2}, y, 1)$，由于异面直线所成角的范围为$(0, \frac{\pi}{2}]$，所以 $\cos\theta=\frac{\left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+y^2+1}}$

$=\frac{2(1-y)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4y^2+5}}\cdot\left[\frac{2(1-y)}{\sqrt{4y^2+5}}\right]^2=1-\frac{8y+1}{4y^2+5}$，令 $8y+1=t$，$1\leqslant t\leqslant 9$，则 $\frac{8y+1}{4y^2+5}=\frac{16}{t+\frac{81}{t}-2}\geqslant\frac{1}{5}$，当 $t=1$ 时取等号. 所以 $\cos\theta=\frac{\left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+y^2+1}}=$